

一类具饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型的分析*

杨俊仙, 闫萍

(安徽农业大学理学院, 安徽 合肥 230036)

摘要: 提出并分析了一类具有饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型, 定义了基本再生数 R_0 。通过分析系统对应的特征方程, 得到了无病平衡点 P_0 和地方病平衡点 P^* 的局部渐近稳定性。进一步, 通过比较原理和构造李雅普诺夫函数, 得出: 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 是持久的。

关键词: SEIR 传染病模型; 饱和发生率; 时滞; 基本再生数; 全局稳定性

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2015)03-0051-05

Analysis of a Delayed SEIR Epidemic Model with Saturation Incidence

YANG Junxian, YAN Ping

(School of Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

Abstract: A delayed SEIR epidemic model with saturation incidence rate is proposed and analyzed, and the basic reproductive number R_0 is defined. By analyzing the corresponding characteristic equations, the local stability of a disease-free equilibrium P_0 and an endemic equilibrium P^* are discussed. Further, by the comparison principle and constructing Lyapunov functions, it is found that if $R_0 < 1$, the disease free equilibrium P_0 is globally asymptotically stable, and if $R_0 > 1$, the endemic equilibrium P^* is permanent.

Key words: SEIR epidemic model; saturation incidence rate; time delay; basic reproductive number; global stability

传染病是危害人类身体健康, 威胁人类生命安全的重要疾病^[1]。长期以来, 人们与各种传染病作斗争, 运用多种方法研究传染病的发病机理和传播规律, 从而控制和消除传染病^[2]。为了合理描述疾病的传播机理, 发生率起了至关重要的作用。Mena-Lorca 等^[3]研究了具有双线性发生率 $\beta S(t)I(t)$ 和标准发生率 $\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}$ 的 SIRS 传染病模型, 其中 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 。但这两种发生率有一个共性, 就是传染者数量是按线性增长的, 这显然对于某些传染病而言是有局限的。于是学者们又提出了非线性发生率^[4-6], 其中 Capasso 等^[4]研究了 1973 年蔓延在巴里的霍乱。考虑了非

线性的饱和发生率 $\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$, 这种发生率可以包括行为变化和群体效应, 相对于双线性发生率和标准发生率更符合实际, 而且可以选择合适的参数控制接触率的无界性。

在实际生活中, 流行病一般会有一个潜伏期, 即当易感者与染病者接触感染后, 首先携带病毒, 但是病毒并不是立即暴发, 而是经过一段时间才发病且进入染病者群, 这一过程在数学模型中通常用时滞来体现。

目前, 已有不少学者研究了具有各种非线性发生率和时滞的传染病模型^[7-14]。本文讨论了具有饱和发生率和时滞的 SEIR 传染病模型

* 收稿日期: 2014-09-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201002); 安徽农业大学校繁荣基金资助项目(2013zs03)

作者简介: 杨俊仙(1976年生), 女; 研究方向: 微分方程、生物数学; E-mail: yangjunxian@ahau.edu.cn

$$\begin{cases} S'(t) = A - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \mu S(t), \\ E'(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - \mu E(t), \\ I'(t) = \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - (\mu + r)I(t), \\ R'(t) = rI(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 分别表示在 t 时刻的易感者、潜伏者、染病者和移出者。设 A 表示人口的常数输入率, β 表示疾病的发生率系数, μ 表示各类人群的自然死亡率系数, r 表示染病者的自然恢复率系数, τ 为时滞, 表示疾病的潜伏期, $\frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)}$ 表示在 $t - \tau$ 时刻染病但在 t 时刻仍然存活的染病者数量。假定常数 A, β, μ, r, τ 均为正数。

系统 (1) 满足初始条件:

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \varphi_1(\theta), E(\theta) = \varphi_2(\theta), \\ I(\theta) &= \varphi_3(\theta), R(\theta) = \varphi_4(\theta), \\ \varphi_i(\theta) &\geq 0, \theta \in [-\tau, 0], \\ \varphi_i(0) &> 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $(\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta), \varphi_4(\theta)) \in C([- \tau, 0], \mathbf{R}_{+0}^4)$, 表示从区间 $[- \tau, 0]$ 到 \mathbf{R}_{+0}^4 且具上确界范数的 Banach 空间的连续泛函, $\mathbf{R}_{+0}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ 。

由泛函微分方程的基本理论知识可知^[15], 系统 (1) 存在唯一满足初始条件 (2) 的解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$, 且对任意 $t \geq 0$, 都有 $S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0, R(t) > 0$ 。

1 局部稳定性

显然, 系统 (1) 总有一个无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0, 0)$, 其中 $S_0 = \frac{A}{\mu}$ 。若 $A\beta e^{-\mu\tau} > \mu(\mu + r)$, 则系统 (1) 有唯一的地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$,

$$S^* = \frac{(\mu + r)e^{\mu\tau}(1 + \alpha I^*)}{\beta}, I^* = \frac{A\beta e^{-\mu\tau} - \mu(\mu + r)}{(\mu + r)(\mu\alpha + \beta)},$$

$$E^* = \frac{(e^{\mu\tau} - 1)(\mu + r)I^*}{\mu}, R^* = \frac{rI^*}{\mu}$$

令

$$R_0 = \frac{A\beta e^{-\mu\tau}}{\mu(\mu + r)}$$

R_0 称为系统 (1) 的基本再生数。显然, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 存在; 当 $R_0 < 1$ 时, 地方病

P^* 不存在。

在本节, 我们通过方程 (1) 对应的特征方程来讨论无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0, 0)$ 和地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ 的局部渐近稳定性。

引理 1 对方程 (1) 满足初始条件 (2) 的任意解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}$$

证明 令 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, 则系统 (1) 化为

$$N'(t) = A - \mu N(t)$$

因此, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}$ 。

根据生物学意义, $D = \{(S, E, I, R) \mid S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0, R(t) > 0, N(t) \leq \frac{A}{\mu}\}$ 是系统 (1) 的正向不变集。

注意到 $R(t)$ 在系统 (1) 的前三个方程中均未出现, 则系统 (1) 可通过系统 (3) 来研究。

$$\begin{cases} S'(t) = A - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \mu S(t), \\ E'(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - \mu E(t), \\ I'(t) = \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - (\mu + r)I(t) \end{cases} \quad (3)$$

定理 1 若 $R_0 < 1$, 则系统 (3) 的无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的; 若 $R_0 > 1$, 则 $P_0(S_0, 0, 0)$ 是不稳定的。

证明 系统 (3) 在无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0)$ 处线性化近似系统为:

$$\begin{cases} S'(t) = -\mu S - \beta S_0 I, \\ E'(t) = -\mu E(t) + \beta S_0 I - \beta e^{-\mu\tau} S_0 I(t - \tau), \\ I'(t) = \beta e^{-\mu\tau} S_0 I(t - \tau) - (\mu + r)I(t) \end{cases} \quad (4)$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda - \beta S_0 e^{-(\mu+\lambda)\tau} + \mu + r) = 0 \quad (5)$$

显然, 方程 (5) 总有一个负实根 $\lambda = -\mu$ 。方程 (5) 其余的根均取决于下列方程

$$g(\lambda) = \lambda - \beta S_0 e^{-(\mu+\lambda)\tau} + \mu + r$$

当 $R_0 < 1$, 令 $g(\lambda) = 0$, 于是

$$\frac{\beta A e^{-(\mu+\lambda)\tau}}{\mu(\lambda + \mu + r)} = 1 \quad (6)$$

若 $Re(\lambda) \geq 0$, 则

$$1 = \left| \frac{\beta A e^{-(\mu+\lambda)\tau}}{\mu(\lambda + \mu + r)} \right| \leq \frac{\beta A e^{-\mu\tau}}{\mu(\mu + r)} < 1$$

得出矛盾。这表明当 $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ 时方程 (6) 没有根。因此, 方程 (6) 所有的根均具有负实部, 所以, 当 $R_0 < 1$ 时, P_0 是局部渐近稳定的。

当 $R_0 > 1$ 时, $g(0) = -\beta S_0 e^{-\mu\tau} + \mu + r = -\beta \frac{A}{\mu} e^{-\mu\tau} + \mu + r < 0, g(+\infty) = +\infty$ 。因此 $g(\lambda)$ 至少有一个正实根, 故 P_0 是不稳定的。

定理 2 若 $R_0 > 1$, 则系统 (3) 的地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明 系统 (3) 关于地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*)$ 的线性化近似系统为

$$\begin{cases} S'(t) = -\left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + \mu\right)S - \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*}I, \\ E'(t) = \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}S - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}e^{-\mu\tau}S(t - \tau) + \\ \quad \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*}I - \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*}e^{-\mu\tau}I(t - \tau) - \mu E(t), \\ I'(t) = \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}e^{-\mu\tau}S(t - \tau) + \\ \quad \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*}e^{-\mu\tau}I(t - \tau) - (\mu + r)I \end{cases} \quad (7)$$

系统 (7) 对应的特征方程为

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\lambda e^{-\lambda\tau} + a_3e^{-\lambda\tau} + a_4) = 0 \quad (8)$$

其中

$$a_1 = 2\mu + r + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}, a_2 = -\frac{\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*}, \\ a_3 = -\frac{\mu\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*}, a_4 = (\mu + r)\left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right)$$

显然, 方程 (8) 总有一个负实根 $\lambda = -\mu$ 。方程 (8) 其余的所有根均取决于下列方程:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\lambda e^{-\lambda\tau} + a_3e^{-\lambda\tau} + a_4 = 0 \quad (9)$$

根据文献 [16], 超越方程 (9) 有正实部的根当且仅它有纯虚根。令 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (9) 的一个纯虚根, 将其实部与虚部分离得

$$\begin{cases} a_2\omega\sin\omega\tau + a_3\cos\omega\tau = \omega^2 - a_4 \\ a_2\omega\cos\omega\tau - a_3\sin\omega\tau = -a_1\omega \end{cases} \quad (10)$$

再将方程 (10) 的两个方程分别平方后相加得

$$\omega^4 + (a_1^2 - a_2^2 - 2a_4)\omega^2 + a_4^2 - a_3^2 = 0 \quad (11)$$

令 $\omega^2 = z$, 则方程 (11) 变为

$$z^2 + (a_1^2 - a_2^2 - 2a_4)z + a_4^2 - a_3^2 = 0 \quad (12)$$

由于

$$a_1^2 - a_2^2 - 2a_4 = \left(2\mu + r + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right)^2 -$$

$$\left(\frac{\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*}\right)^2 - 2(\mu + r)\left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right) = \\ (\mu + r)^2 + \left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right)^2 - \left(\frac{\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*}\right)^2$$

从系统 (3) 的第三个方程可得

$$\frac{\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*} = \mu + r$$

因此

$$a_1^2 - a_2^2 - 2a_4 = \left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right)^2 > 0$$

由于

$$a_4 - a_3 = (\mu + r)\left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + \mu\right) + \frac{\mu\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*} > 0, \\ a_4 + a_3 = (\mu + r)\left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right) - \frac{\mu\beta S^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^*} = \\ (\mu + r)\left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}\right) - \mu(\mu + r) = \\ (\mu + r)\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} > 0$$

从而

$$a_4^2 - a_3^2 = (a_4 - a_3)(a_4 + a_3) > 0$$

所以方程 (12) 没有正实根, 相应地, 方程 (9) 的任意根均具有负实部。因此, 若 $R_0 > 1$, 则系统 (3) 的地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的。

2 无病平衡点 P_0 的全局渐近稳定性

定理 3 若 $R_0 < 1$, 则系统 (1) 的无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的。

证明 设 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ 系统 (1) 的满足初始条件 (2) 的任意解。对 $t \geq \tau$, 定义如下函数

$$V(t) = I(t) + \beta e^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t \frac{S(u)I(u)}{1 + \alpha I(u)} du$$

则 $V(t)$ 关于系统 (1) 的导数为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt} + \beta e^{-\mu t} \frac{S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \\ \beta e^{-\mu t} \frac{S(t - \tau)I(t - \tau)}{1 + \alpha I(t - \tau)} = \\ -(\mu + r)I(t) + \beta e^{-\mu t} \frac{S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} \leq \\ -(\mu + r)I(t) + \beta e^{-\mu t} \frac{A}{\mu} I(t) = \\ \left(\beta e^{-\mu t} \frac{A}{\mu} - \mu - r\right)I(t) \leq 0$$

当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 。由系统 (1) 得,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{A}{\mu}, \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0.$$

3 系统 (1) 的持久性

在本节, 我们将证明当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (1) 是持久的。

引理 2 系统 (1) 的满足初始条件 (2) 的任意解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\mu A}{\beta A + \mu^2} \equiv \eta_1$$

证明 由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}$ 可得, 对任意充分小的 ε , 总存在一个足够大的 t_1 , 使得当 $t \geq t_1$ 时, $I(t) \leq \frac{A}{\mu} + \varepsilon$ 。于是当 $t \geq t_1 + \tau$ 时,

$$S'(t) \geq A - \left[\beta \left(\frac{A}{\mu} + \varepsilon \right) + \mu \right] S(t)$$

显然

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\beta \left(\frac{A}{\mu} + \varepsilon \right) + \mu}$$

由于 ε 充分小, 因此

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\beta \frac{A}{\mu} + \mu} = \frac{\mu A}{\beta A + \mu^2} \equiv \eta_1$$

引理 3 当 t 充分大时, $I(t) \leq qI^*$ 是不可能的。

证明 由于 $S^* < \frac{A}{\mu}$, 因此对某个 $q (0 < q < 1)$, 有 $S^* < \frac{A}{\mu + \beta q I^*}$, 从而存在一个充分大的 $d (d \geq 0)$, 使得

$$S^* \leq \frac{A}{\beta q I^* + \mu} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu)d}) \equiv \bar{S} \quad (13)$$

用反证法, 假设引理 3 不成立, 则存在一个 t_0 , 使得当 $t \geq t_0$ 时, $I(t) \leq qI^*$ 。

通过系统 (1) 的第一个方程得

$$S'(t) = A - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \mu S(t) \geq A - (\beta q I^* + \mu) S(t), \forall t \geq t_0 \quad (14)$$

因此, 对某个 $t (t \geq t_0 + d)$, 由式 (14) 得

$$S(t) \geq S(t_0) e^{-(\beta q I^* + \mu)(t-t_0)} + A \int_{t_0}^t e^{-(\beta q I^* + \mu)(t-\theta)} d\theta > \frac{A}{\beta q I^* + \mu} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu)(t-t_0)}) > \frac{A}{\beta q I^* + \mu} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu)d}) \equiv \bar{S} \quad (15)$$

通过式 (13) 和式 (15) 得

$$S(t) > \bar{S} > S^*, \forall t \geq t_0 + d \quad (16)$$

当 $t \geq \tau$ 时, 定义下列函数

$$V(t) = I(t) + \beta e^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t \frac{S(\theta)I(\theta)}{1 + \alpha I(\theta)} d\theta$$

对 $V(t)$ 求导得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \beta e^{-\mu t} \frac{S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (\mu + r)I(t) > \\ &\left(\beta e^{-\mu t} \frac{S(t)}{1 + \alpha I^*} - \mu - r \right) I(t) = \\ &\frac{\beta e^{-\mu t}}{1 + \alpha I^*} (S(t) - S^*) I(t) \end{aligned} \quad (17)$$

令 $\bar{I} = \min_{\theta \in [t-\tau, t]} I(t_0 + d + \tau + \theta)$, 有 $I(t) \geq \bar{I}$, 对 $\forall t \geq t_0 + d$ 。否则, 存在一个 $T \geq 0$, 使得当 $t_0 + d \leq t \leq t_0 + d + \tau + T$ 时, 有

$$I(t) \geq \bar{I}, I(t_0 + d + \tau + T) = \bar{I}, \frac{dI}{dt} \Big|_{t=t_0+d+\tau+T} \leq 0$$

但由系统 (1) 的第三个方程得

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} \Big|_{t=t_0+d+\tau+T} &= \\ \frac{\beta e^{-\mu T} S(t_0 + d + T) I(t_0 + d + T)}{1 + \alpha I(t_0 + d + T)} - (\mu + r) \bar{I} &> \\ \frac{\beta e^{-\mu T} S^* \bar{I}}{1 + \alpha I^*} - (\mu + r) \bar{I} &= \left(\frac{\beta e^{-\mu T} S^*}{1 + \alpha I^*} - \mu - r \right) \bar{I} = 0 \end{aligned}$$

显然得出矛盾。因此, 对 $\forall t \geq t_0 + d$, $I(t) \geq \bar{I}$ 。

由式 (17) 得

$$\frac{dV}{dt} > \frac{\beta e^{-\mu t}}{1 + \alpha I^*} (S(t) - S^*) \bar{I}, t \geq t_0 + d + \tau$$

通过式 (16), 表明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = +\infty$ 。另一方面,

$$V(t) = I(t) + \beta e^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t \frac{S(\theta)I(\theta)}{1 + \alpha I(\theta)} d\theta \leq \frac{A}{\mu} (1 + \beta \tau e^{-\mu \tau})$$

与 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = +\infty$ 矛盾。因此当 t 充分大时, $I(t) \leq qI^*$ 是不可能的。

引理 4 若 $R_0 > 1$, 则系统 (1) 的满足初始条件 (2) 的任意解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq \min \left\{ \frac{qI^*}{2}, qI^* e^{-(\mu+r)\tau} \right\} = \eta_2$$

证明 鉴于引理 3, 分两种情况来讨论方程 (1) 的正解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$:

情况 I: 对充分大的 t , $I(t) \geq qI^*$;

情况 II: 对充分大的 t , $I(t)$ 关于 qI^* 振动。

对情况 I, 显然 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq qI^*$ 。

现在我们考虑情况 II。令 $t_1, t_2 (t_0 + d + \tau < t_1 < t_2)$ 充分大, 使得

$$I(t_1) = I(t_2) = qI^*, I(t) < qI^*, t_1 < t < t_2$$

由式 (16) 得, 当 $t_1 < t < t_2$ 时, $S(t) > S^*$ 。不失一般性, 令 $t_2 - t_1 = h$ 。由于系统 (1) 的正解是一致有界的, 因此 $I(t)$ 是一致连续的。所以存在一个 ω ($0 < \omega < \tau$, 且不依赖于 t_1 的选择, 使得当 $t_1 < t < t_1 + \omega$ 时, $I(t) \geq \frac{qI^*}{2}$ 。

(i) 若 $h \leq \omega < \tau$, 结论显然成立。

(ii) 若 $\omega < h \leq \tau$, 当 $t_1 < t < t_1 + \omega$ 时, 显然 $I(t) \geq \frac{qI^*}{2}$ 。下证当 $t_1 + \omega \leq t < t_2$ 时, $I(t) \geq \frac{qI^*}{2}$ 。

由系统 (1) 的第三个方程得

$$I'(t) \geq -(\mu + r)I(t),$$

$I(t) \geq I(t_1)e^{-(\mu+r)(t-t_1)} > qI^*e^{-(\mu+r)\tau}, t_1 + \omega \leq t < t_2$ 因此, 当 $\omega < h \leq \tau$ 时, 对 $t_1 < t < t_2$, $I(t) \geq \eta_2$ 。

(iii) 若 $\omega < \tau \leq h$, 由系统 (1) 的第三个方程得, $t_1 < t < t_1 + \tau$ 时, $I(t) \geq \eta_2$ 。类似上面的证法, 可得 $t_1 + \tau < t < t_2$ 时, $I(t) \geq \eta_2$ 。

由于区间 $[t_1, t_2]$ 是任意选定的, 所以对充分大的 t , 有 $I(t) \geq \eta_2$ 。因此

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq \min\left\{\frac{qI^*}{2}, qI^*e^{-(\mu+r)\tau}\right\} = \eta_2$$

定理 4 对系统 (1) 的满足初始条件 (2) 的任意解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$, 若 $R_0 > 1$, 则系统 (1) 是持久的。

证明 由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}$ 可知, 系统 (1) 的满足初始条件 (2) 的解是最终一致有界的。引理 2 和引理 4 表明 $S(t), I(t)$ 最终一致有界的。对于系统 (1) 的第二个方程, $E(t)$ 可以表示为

$$E(t) = \int_{t-\tau}^t \beta \frac{S(u)I(u)}{1 + \alpha I(u)} e^{-\mu(t-u)} du$$

于是

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} E(t) \geq \frac{\beta\tau\eta_1\eta_2}{1 + \alpha\eta_2} e^{-\mu\tau}$$

由系统 (1) 的第四个方程得 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} R(t) \geq \frac{r\eta_2}{\mu}$ 。

4 结 论

本文主要讨论了具有饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型, 得到了无病平衡点 P_0 的全局渐近稳定性和地方病平衡点 P^* 的持久性。当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的, 地方病平衡点 P^* 不存在。当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P_0 不稳定而地方病平衡点 P^* 是持久的。在以后的工作中, 我们可进一步考虑在原模型的基础上, 加入脉冲的情形。

参考文献:

- [1] 翁心华, 潘孝彰, 王岱明. 现代感染病学[M]. 上海: 上海医科大学出版社, 1998.
- [2] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] MENA-LORCA J, HETHCOTE H W. Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes [J]. Journal of Mathematical Biology, 1992, 30(7): 693 - 716.
- [4] CAPASSO V, SERIO G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model [J]. Mathematical Biosciences, 1978, 42 (1/2): 43 - 61.
- [5] HOU J, TENG Z. Continuous and impulsive vaccination of SEIR epidemic models with saturation incidence rates [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2009, 79 (10): 3038 - 3054.
- [6] LIU W M, LEVIN S A, IWASA Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J]. Journal of Mathematical Biology, 1986, 23 (2) : 187 - 204.
- [7] HUANG G, TAKEUCHI Y, MA W B, et al. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2010, 72: 1192 - 1207.
- [8] XU R, MA Z E. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 3175 - 3189.
- [9] SAFI M A, GUMEL A B. The effect of incidence functions on the dynamics of a quarantine/isolation model with time delay [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(1): 215 - 235.
- [10] XU R, MA Z E. Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 41(5): 2319 - 2325.
- [11] CHEN H, SUN J T. Global stability of delay multigroup epidemic models with group mixing and nonlinear incidence rates [J]. Applied Mathematics and computation, 2011, 218(8): 4391 - 4400.
- [12] ENATSU Y, NAKATA Y, MUROYA Y. Global stability of sirs epidemic models with a class of nonlinear incidence rates and distributed delays [J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32(3): 851 - 865.
- [13] GUO P, YANG Z C. The stability of SIRI model with nonlinear incidence rate [J]. Journal of chong qing Normal University, 2011, 28(4): 35 - 39.
- [14] MCCLUSKEY C C. Global stability of an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence [J]. Mathematical Biosciences Engineer, 2010, 7(4): 837 - 850.
- [15] HALE J K, VERDUYN LUNEL S M. Introduction to functional differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993: 130 - 166.
- [16] LEVIN S A, HALLAM T G, GROSS L J. Applied mathematical ecology [M]. Berlin: Springer, 1989.